

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

(تیر ماه ۱۴۰۲)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(خارج کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۱)

نکته: تنها دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله ثابت است.

با توجه به فرض سؤال، دنباله a_1, a_2, a_3, \dots هم دنباله حسابی و هم دنباله هندسی است، لذا این دنباله، یک دنباله ثابت است. در این صورت مقدار $d = 0$ و مقدار $r = 1$ است.

پس مقدار خواسته شده سؤال برابر است با:

$$r + d = 1 + 0 = 1$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) دارد.

چون نقاط $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ روی سهمی قرار دارند و عرض‌های آنها نیز برابر است، پس:

$$x_S = \frac{1 + (-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

با توجه به فرض سؤال، عرض رأس سهمی برابر با $-\frac{1}{4}$ است، پس $S(-2, -\frac{1}{4})$.

سهمی به صورت $y = a(x+2)^2 - \frac{1}{4}$ خواهد بود.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(0, \frac{3}{2}) \in y \Rightarrow \frac{3}{2} = a(0+2)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} = 4a - \frac{1}{4} \Rightarrow 4a = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow 4a = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{16}$$

حال مقدار β را به دست می‌آوریم:

$$(1, \beta) \in y \Rightarrow \beta = \frac{1}{16}(1+2)^2 - \frac{1}{4} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه $A = B$ است.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{x}{2}, \frac{y}{3}, 5 \right\} \\ B &= \{ z, t, 1, 4 \} \end{aligned} \xrightarrow{A=B} A=B = \{ 1, 4, 5 \}$$

در نتیجه یا $\frac{x}{2} = 1$ و $\frac{y}{3} = 4$ است یا $\frac{x}{2} = 4$ و $\frac{y}{3} = 1$ است. داریم:

$$(1) \quad \frac{x}{2} = 1 \text{ و } \frac{y}{3} = 4; \text{ حالت‌های زیر را داریم:}$$

$$x=2, y=12, z=5, t=1 \Rightarrow x+y+z+t=20$$

$$x=2, y=12, z=5, t=4 \Rightarrow x+y+z+t=23 \quad \checkmark$$

$$x=2, y=12, z=5, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=24 \quad \checkmark$$

$$x=2, y=12, z=1, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=20$$

$$x=2, y=12, z=4, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=23 \quad \checkmark$$

$$(2) \quad \frac{x}{2} = 4 \text{ و } \frac{y}{3} = 1; \text{ حالت‌های زیر را داریم:}$$

$$x=8, y=3, z=5, t=1 \Rightarrow x+y+z+t=17$$

$$x=8, y=3, z=5, t=4 \Rightarrow x+y+z+t=20$$

$$x=8, y=3, z=5, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=21 \quad \checkmark$$

$$x=8, y=3, z=1, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=17$$

$$x=8, y=3, z=4, t=5 \Rightarrow x+y+z+t=20$$

بنابراین در ۴ حالت، مجموع x, y, z, t از ۲۰ بیشتر می‌شود.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

نکته: هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است که ارزش گزاره درست را با حرف «د» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» نمایش می‌دهیم.

سطرهای جدول، ارزش درستی گزاره x را در گزینه‌ها جای‌گذاری می‌کنیم تا به مثال نقض برسیم:

گزینه ۲: $(\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r))$

با توجه به سطر دوم داریم: $(d \Rightarrow (d \vee n)) \Rightarrow ((d \Rightarrow d) \wedge (n \wedge d)) \Rightarrow (d \Rightarrow d) \Rightarrow (d \wedge n) \equiv d \Rightarrow n \equiv n$

با توجه به سطر دوم جدول، گزاره x نادرست شده است، پس تناقض است.

گزینه ۳: $(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$

با توجه به سطر پنجم داریم: $(d \Rightarrow (n \vee d)) \Rightarrow [((n \Rightarrow d) \Rightarrow (d \wedge d)) \wedge d] \equiv (d \Rightarrow d) \Rightarrow [(d \Rightarrow d) \wedge d] \equiv d \Rightarrow d \equiv d$

با توجه به سطر پنجم جدول، گزاره x نادرست شده است، پس تناقض است.

گزینه ۴: $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim((p \wedge r) \Rightarrow q)]$

با توجه به سطر سوم داریم:

$((d \wedge n) \Rightarrow d) \Rightarrow [(n \Rightarrow (d \vee d)) \Rightarrow \sim((d \wedge d) \Rightarrow n)] \equiv (n \Rightarrow d) \Rightarrow [(n \Rightarrow d) \Rightarrow \sim(d \Rightarrow n)]$

$\equiv d \Rightarrow (d \Rightarrow d) \equiv d \Rightarrow d \equiv d$

با توجه به سطر سوم جدول، گزاره x نادرست شده است، پس تناقض است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۱)

۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته: به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، روابط زیر برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

با توجه به نکته، در معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ داریم:

حال داریم:

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7 \xrightarrow{\beta=4-\alpha} 2\alpha^2 + (4-\alpha)^2 - 4\alpha = 7 \Rightarrow 2\alpha^2 + 16 + \alpha^2 - 8\alpha - 4\alpha = 7$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0 \xrightarrow{\div 3} \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0$ و مقایسه آن با معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ داریم: $a = -9$

ریشه‌های این معادله نیز برابرند با: $\alpha = 3$ و $\beta = 1$

حال مقدار خواسته‌شده سؤال را به‌دست می‌آوریم: $\frac{a}{\alpha} = \frac{-9}{3} = -3$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۱)

۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کند.

نکته: اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{(2-x)^2}{x^2(2-x)^2} + \frac{x^2}{x^2(2-x)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{4+x^2-4x+x^2}{[x(2-x)]^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2-2x)+4}{(2x-x^2)^2} = \frac{40}{9}$$

$$\frac{2t+4}{(-t)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow 18t+36=40t^2 \Rightarrow 40t^2-18t-36=0$$

حال اگر قرار دهیم $x^2 - 2x = t$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{18 + \sqrt{18^2 + 4 \times 40 \times 36}}{80} = \frac{18 + \sqrt{6 \cdot 84}}{80} = \frac{18 + 78}{80} = \frac{96}{80} = \frac{6}{5} \\ t = \frac{18 - \sqrt{18^2 + 4 \times 40 \times 36}}{80} = \frac{18 - \sqrt{6 \cdot 84}}{80} = \frac{18 - 78}{80} = \frac{-60}{80} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = \frac{6}{5} \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{6}{5} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha_1 + \beta_1 = S_1 = 2$$

پس خواهیم داشت:

$$x^2 - 2x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha_2 + \beta_2 = S_2 = 2$$

$$S_1 + S_2 = 2 + 2 = 4$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده سؤال برابر است با:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

نکته: اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، طول دو عدد AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: مختصات نقطه وسط دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با: $M = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ دو خط d و d' را در

نظر می گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} d: x - 3y = 4 \\ d': x + 4y = -3 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} -7y = 7 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1$$

در نتیجه ۲ خط d و d' متقاطع هستند و نقطه برخورد آن‌ها $B(1, -1)$ است.واضح است که نقطه $A(-6, 3)$ روی هیچ یک از خطوط داده شده قرار ندارد، پس A و B روی قطر متوازی الاضلاع هستند، لذا نقطه M وسط قطر برابر است با:

$$M = (\frac{-6+1}{2}, \frac{3-1}{2}) \Rightarrow M(-\frac{5}{2}, 1)$$

حال فاصله M را از دو خط داده شده حساب می کنیم:

$$\text{فاصله } M \text{ از } d = \frac{|\frac{-5}{2} - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\frac{19}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{19}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{فاصله } M \text{ از خط } d' = \frac{|\frac{-5}{2} + 4 \times 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{17}} = \frac{9}{2\sqrt{17}}$$

بنابراین بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع برابر با $\frac{19}{2\sqrt{10}}$ است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: اگر f یک تابع باشد، وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

ابتدا طول نقطه تقاطع را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} 5y - 10x &= 12 \xrightarrow{y=7/2} 36 - 10x = 12 \\ \Rightarrow 10x &= 24 \Rightarrow x = 2/4 \end{aligned}$$

پس نقطه $(2/4, 7/2)$ در وارون تابع $f(x)$ صدق می کند:

$$(2/4, 7/2) \in f^{-1}(x) \Rightarrow (7/2, 2/4) \in f(x)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx-1} \Rightarrow 2/4 = \sqrt{7/2} \times \sqrt{m \times 7/2 - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 2/4 \times 2/4 = 7/2 (7/2 m - 1)$$

$$\Rightarrow 0/8 = 7/2 m - 1 \Rightarrow 7/2 m = 1/8 \Rightarrow m = \frac{1/8}{7/2} = \frac{1}{4}$$

حال مقدار خواسته شده سؤال را به دست می آوریم:

$$f(\frac{4}{m}) = f(\frac{4}{1/4}) = f(16) = \sqrt{16} \sqrt{\frac{1}{4} \times 16 - 1} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس‌های ۱، ۲ و ۳، فصل ۳)

نکته: هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ ، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک «تابع نمایی» می‌نامیم.نکته: اگر α عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است و از این‌رو دارای تابع وارون f^{-1} است که «تابع لگاریتمی» پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

نکته: $\log_a b^n = n \log_a b$

نکته: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

نکته: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

اگر جرم اولیه عنصر را m_0 در نظر بگیریم، آنگاه جرم آن عنصر بعد از گذشت n هفته برابر است با:

$$m = m_0 \times \left(\frac{V}{\Lambda}\right)^n \xrightarrow{m = \frac{1}{V} m_0} \frac{1}{V} m_0 = m_0 \times \left(\frac{V}{\Lambda}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{V} = \left(\frac{V}{\Lambda}\right)^n \quad (1)$$

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{1/6} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \quad \log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{0.6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

حال از طرفین رابطه (۱)، لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم:

$$\log_3 \frac{1}{V} = \log_3 \left(\frac{V}{\Lambda}\right)^n \Rightarrow \log_3 V^{-1} = n \log_3 \frac{V}{\Lambda} \Rightarrow -\log_3 V = n(\log_3 V - \log_3 \Lambda) \Rightarrow -\log_3 V = n(\log_3 V - 3 \log_3 2)$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{3} = n\left(\frac{5}{3} - \frac{15}{8}\right) \Rightarrow n = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{5}{24}} = \frac{24}{3} = 8$$

$$8 \times 7 = 56$$

حال ۸ هفته را به روز تبدیل می‌کنیم:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

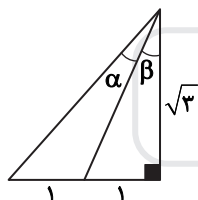
۱۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

$$\tan \alpha = \tan[(\alpha + \beta) - \beta] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \beta}$$

با توجه به شکل، داریم:



$$\tan(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: اگر ABC یک مثلث دلخواه باشد، آنگاه:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و

$$x = (2k + 1)\pi - \alpha \quad k \in \mathbb{Z} \text{ می‌باشد که}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times \sin \alpha = 15 \Rightarrow 3 \cdot \sin \alpha = 15 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{چون } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \text{ پس:}$$

چون $0 < \alpha < 180^\circ$ ، پس تنها جواب‌های قابل قبول $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ هستند.

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

مقدار خواسته شده سؤال برابر است با:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\text{نکته: } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{نکته: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{3\pi}{4})} = \frac{2}{a} - b \cos^2(cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{a} - b \left[\frac{1 + \cos 2(cx - \frac{3\pi}{4})}{2} \right] \\ &= \frac{2}{a} - \frac{b}{2} (1 + \cos(2cx - \frac{3\pi}{2})) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} - 2cx) = \frac{b}{2} \sin(-2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب برابر π است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|-2c|} = \pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{2}$$

چون تابع در نزدیکی مبدأ مختصات روبه بالا است و تابع نیز \sin می‌باشد، پس $\frac{b}{2} \times (-2c) > 0$ است، پس فرض می‌کنیم $b > 0$ و در نتیجه $c < 0$ خواهد بود.

$$|c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

حال داریم:

$$\text{مقدار ماکزیمم: } \left| \frac{b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\text{مقدار مینیمم: } -\left| \frac{b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow -b + 6 = 0 \Rightarrow b = 6$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 3 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{4}\right) + 3 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

$$\text{نکته: } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{نکته: } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{توان}} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

حال با جای گذاری مقادیر به دست آمده در فرض سؤال داریم:

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow 2 + m \times \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{m}{3} = -1 \Rightarrow m = -3$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، «اکیداً صعودی» می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آنگاه: $f(a) < f(b)$. چون دامنه تابع f مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، پس:

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow \frac{m_1 = \frac{9 - \sqrt{97}}{4}}{m_2 = \frac{9 + \sqrt{97}}{4}} \rightarrow m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4}, m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \quad (1)$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً صعودی است، پس:

$$2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4 \Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (m + 1)(m - 6) < 0 \Rightarrow -1 < m < 6 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow m \in (-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}) \cup (\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6)$$

در بازه به دست آمده فقط عدد «۵» عددی صحیح است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ دو چندجمله‌ای باشند، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

نکته: تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است، تابع هموگرافیک می‌نامیم.

نکته: اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع هموگرافیک باشد، آنگاه: $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

نکته: اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع هموگرافیک باشد، آنگاه $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم و $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی هستند.

فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، پس:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-dx+b}{cx-a}} = \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{d}{c}} = -\frac{a}{d} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-dx+b}{cx-a}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{-\frac{d}{c}}{\frac{a}{c}} = -\frac{d}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow a = \pm d$$

حال با توجه به نکته، مجانب‌های تابع f به صورت $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$ هستند، پس:

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=d} x = -\frac{d}{c}, y = \frac{d}{c} \Rightarrow o(-\frac{d}{c}, \frac{d}{c})$$

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=-d} x = -\frac{d}{c}, y = -\frac{d}{c} \Rightarrow o(-\frac{d}{c}, -\frac{d}{c})$$

در نتیجه یا باید نقطه برخورد، دارای طول و عرض برابر باشد یا دارای طول و عرض قرینه باشد.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

نکته: گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

با استفاده از عددگذاری خواهیم داشت:

(۱) n فرد باشد: $n = 1$ ، با توجه به فرض سؤال $f(x)$ باید در ۱ و -۱ پیوسته باشد:

$$[1] = 1 \Rightarrow f(1) = [-1] - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = | -2 - 1 | = 3$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$ ، پس تابع $f(x)$ در ۱ پیوسته نیست.(۲) n زوج باشد: $n = 2$. با توجه به فرض سؤال، $f(x)$ باید در ۲ و -۲ پیوسته باشد:

$$[2] = 2 \Rightarrow f(2) = k - 2 + [2] = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = k - 2 + 2 = k, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = | -2 - 2 | = 4$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow k = k = 4$$

$$[-2] = [-2] \Rightarrow f(-2) = k + 2 - 2 = k$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = k + 2 - 2 = k, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = | 2 - (-2) | = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) \Rightarrow k = k = 4$$

پس باید داشته باشیم:

در نتیجه به ازای $k = 4$ ، تابع $f(x)$ در ۲ و -۲ پیوسته است، پس n باید زوج باشد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۵)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نکته (قاعده هوییتال): اگر $f(x) = g(x) = 0$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند و $g'(a) \neq 0$ ، آنگاه:ابتدا $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = xg(x) - 2x + 5 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) + 2x - 5}{x}$$

$$g(x) = \frac{\frac{5 \cos x}{1 - \sin x} + 2x - 5}{x} = \frac{5 \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)}$$

حال $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \sin x + 2 - 2 \sin x - 2x \cos x + 5 \cos x}{(1 - \sin x) + (-x \cos x)} = \frac{0 + 2 - 0 - 0 + 5}{(1 - 0) + 0} = \frac{7}{1} = 7$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ برابر با مشتق تابع f در نقطه a است.

فرض می کنیم خط d ، سهمی $y = x^2 - 1$ را در نقاط A و B قطع کند. چون خط d موازی محور x ها است، پس نقاط A و B دارای عرض یکسان هستند و چون A و B روی سهمی قرار دارند، پس طول این نقاط قرینه یکدیگرند، یعنی:

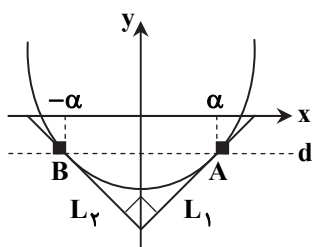
$$y' = 2x \quad \text{حال از تابع } y = x^2 - 1 \text{ مشتق می گیریم:}$$

با توجه به نکته، شیب دو خط L_1 و L_2 را به دست می آوریم:

$$m_{L_1} = y'(\alpha) = 2\alpha, \quad m_{L_2} = y'(-\alpha) = -2\alpha$$

با توجه به فرض سؤال L_1 و L_2 عمودند، پس:

$$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1 \Rightarrow (2\alpha)(-2\alpha) = -1 \Rightarrow -4\alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2}$$



در نتیجه: $A(\frac{1}{4}, \beta)$ و $B(-\frac{1}{4}, \beta)$.

حال مقدار β را محاسبه می‌کنیم: $f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

در نتیجه مقدار خواسته شده سؤال برابر است با: $2\beta = 2 \times (-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{2}$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۵)

نکته: مختصات نقطه عطف تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر است با: $(-\frac{b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$

برای آنکه نقطه عطف در ناحیه سوم مختصات باشد، باید $x < 0$ و $y < 0$ باشد.

$$x_A = -\frac{b}{3a} = -\frac{-(k+2)}{3k} = \frac{2(k+2)}{3k} < 0 \Rightarrow k \in (-2, 0) \quad (1)$$

حال مختصات نقطه عطف را به دست می‌آوریم:

$$y_A = f(-\frac{b}{3a}) = f(\frac{2(k+2)}{3k}) = \frac{k}{2} \left[\frac{2(k+2)}{3k} \right]^3 - (k+2) \left[\frac{2(k+2)}{3k} \right]^2 = \frac{k}{2} \left[\frac{8(k+2)^3}{27k^3} \right] - \frac{4(k+2)^2}{9k^2}$$

$$= \frac{4(k+2)^3}{27k^2} - \frac{4(k+2)^2}{9k^2} = \frac{-4(k+2)^2}{27k^2} < 0 \xrightarrow{27k^2 > 0} -4(k+2)^2 < 0 \Rightarrow (k+2)^2 > 0, k > -2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow k \in (-2, 0)$$

در نتیجه تنها عدد صحیح موجود برای k برابر ۱- است.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۵)

نکته: اگر $x = c$ طول یک نقطه مینیم یا ماکزیمم تابع f باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. اگر $f'(c) > 0$ ، آنگاه $x = c$ مینیمم و اگر $f'(c) < 0$ ، آنگاه $x = c$ ماکزیمم است.

$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

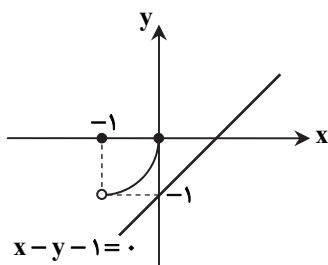
ابتدا دامنه تابع y را به دست می‌آوریم:

$$y = -\sqrt{-x - [x^2]} \quad D_y: -x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow -x \geq [x^2] \Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\sqrt{-(-1) - [(-1)^2]} = 0 \quad x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-0 - [0^2]} = 0 \quad x(-1, 0) \Rightarrow y = -\sqrt{-x - [x^2]} = -\sqrt{-x}$$

در نتیجه تابع y به شکل زیر خواهد بود:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in (-1, 0) \\ 0 & x = -1, 0 \end{cases}$$



نمودار تابع y و خط $x - y - 1 = 0$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که نقطه دلخواه باید روی منحنی $-\sqrt{-x}$ باشد.

نقطه $A(\alpha, -\sqrt{-\alpha})$ را در نظر می‌گیریم. فاصله این نقطه تا خط $x - y - 1 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|\alpha + \sqrt{-\alpha} - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha + \sqrt{-\alpha} - 1|}{\sqrt{2}}$$

چون می‌خواهیم d مینیمم باشد، لذا باید $\alpha + \sqrt{-\alpha} - 1$ مینیمم شود:

$$f = \alpha + \sqrt{-\alpha} - 1 \Rightarrow f' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} \xrightarrow{f'=0} 1 - \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{\left| -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۶)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

با توجه به فرض سؤال، باید کتاب‌ها را طبق موضوع (ریاضی و فیزیک) به صورت قرینه روی همدیگر قرار دهیم. برای این کار ۳ حالت داریم:
(۱) ریاضی-فیزیک-ریاضی-فیزیک-ریاضی-فیزیک: ابتدا ۴ کتاب ریاضی را به ۴! حالت در ۴ جایگاه قرار داده و سپس ۳ کتاب فیزیک را به ۳! حالت در بین آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$۴!۳! = \text{تعداد حالات}$$

(۲) ریاضی-ریاضی-فیزیک-فیزیک-ریاضی-ریاضی: ابتدا ۴ کتاب ریاضی را به ۴! حالت در ۴ جایگاه قرار می‌دهیم و ۳ کتاب فیزیک را نیز به ۳! حالت در بین آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$۴!۳! = \text{تعداد حالات}$$

(۳) فیزیک-ریاضی-ریاضی-فیزیک-ریاضی-فیزیک: ابتدا ۳ کتاب فیزیک را به ۳! حالت در ۳ جایگاه قرار داده و سپس ۴ کتاب ریاضی را به ۴! حالت در بین آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$۴!۳! = \text{تعداد حالات}$$

$$۳(۴!۳!) = ۳ \times ۲۴ \times ۶ = ۴۳۲$$

در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۱، فصل ۷)

نکته: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

$$\text{نکته: } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

فرض می‌کنیم که $P(A \cap B) = x$ است، لذا داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - x = \frac{3}{7} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7} + x$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - x = \frac{1}{7} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{7} + x$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{3}{7}}{x + \frac{1}{7}} = \frac{\frac{7x+3}{7}}{\frac{7x+1}{7}} = \frac{7x+3}{7x+1} = 1 + \frac{2}{7x+1}$$

برای آنکه مقدار $1 + \frac{2}{7x+1}$ کمترین شود، باید $\frac{2}{7x+1}$ کمترین مقدار شود و لذا باید $7x+1$ بیشترین مقدار شود. در نتیجه x باید بیشترین مقدار شود، یعنی $P(A \cap B)$ باید ماکزیمم باشد:

$$\max P(A \cap B) = 1 - [P(A - B) + P(B - A)] = 1 - \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$$

$$\min \frac{P(A)}{P(B)} = 1 + \frac{2}{7 \times \frac{3}{7} + 1} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۳)

نکته: میانگین یا متوسط n داده x_1, x_2, \dots, x_n را با نماد « \bar{x} » نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{نکته: } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

با توجه به فرض سؤال، در هر مرحله باید اختلاف ۲ عدد زوج و فرد را جایگزین کنیم تا اعداد دسته جدید همگی فرد باشند و چون باید این اعداد غیر تکراری باشند، اختلاف اعداد را به صورت (۱، ۱۰۰)، (۲، ۹۹)، (۳، ۹۸)، ... و (۵۰، ۵۱) جایگزین می‌کنیم. لذا اعداد دسته جدید به صورت ۹۹، ۷، ۵، ۳، ۱ خواهند بود.

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7+\dots+99}{50} = \frac{50^2}{50} = 50$$

حال با توجه به نکته داریم:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته: فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

ابتدا احتمال انتخاب هریک از کارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, P(4) = 4x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

در نتیجه:

$$P(1) = \frac{1}{10}, P(2) = \frac{2}{10}, P(3) = \frac{3}{10}, P(4) = \frac{4}{10}$$

حال اگر کارت ۱ بیرون بیاید، سکه را یک بار پرتاب می‌کنیم که احتمال یک بار «رو» آمدن آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

اگر کارت ۲ بیرون بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم که احتمال یک بار «رو» آمدن آن برابر $\frac{2}{4}$ است.

اگر کارت ۳ بیرون بیاید، سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم که احتمال یک بار «رو» آمدن آن برابر $\frac{3}{8}$ است.

اگر کارت ۴ بیرون بیاید، سکه را چهار بار پرتاب می‌کنیم که احتمال یک بار «رو» آمدن آن برابر $\frac{4}{16}$ است.

حال اگر B را پیشامد یک بار «رو» آمدن سکه در نظر بگیریم، داریم:

$$P(1|B) = \frac{P(1)P(B|1)}{P(1)P(B|1) + P(2)P(B|2) + P(3)P(B|3) + P(4)P(B|4)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{16}}$$

$$= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{9}{80} + \frac{2}{20}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{29}{80}} = \frac{4}{29}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

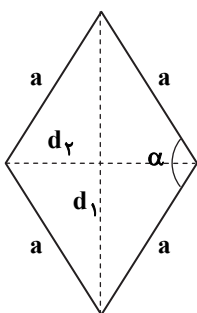
۲۵- پاسخ: گزینه ۱

نکته: مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب در قطر

نکته: اگر طول یک ضلع لوزی برابر a باشد و اندازه زاویه بین ۲ ضلع آن لوزی برابر α باشد، آنگاه مساحت لوزی برابر است با:

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha$$

طبق فرض سؤال، هر ضلع واسطه‌ی هندسی دو قطر لوزی است، پس:



$$\begin{cases} a^2 = d_1 \cdot d_2 \\ S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} a^2 \quad (1)$$

با توجه به نکته داریم:

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cdot (2)} \frac{1}{2} a^2 = a^2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \alpha = 150^\circ \end{cases}$$

در نتیجه اندازه زاویه بزرگ‌تر لوزی برابر 150° است.

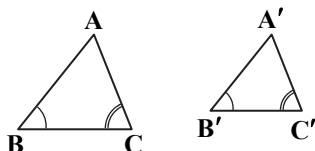
بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۳، فصل ۲)

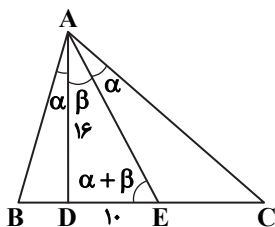
نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



فرض می‌کنیم $\hat{BAD} = \hat{EAC} = \alpha$ و $\hat{DAE} = \beta$ باشند. چون $BA = BE$ است، پس مثلث ABE متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\hat{DEA} = \hat{BAE} = \alpha + \beta$$



حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{ADC} &= \hat{ADE} \\ \alpha + \beta &= \hat{DEA} = \hat{DAC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{DC}{AD} \Rightarrow \frac{16}{10} = \frac{10 + EC}{16} \Rightarrow 256 = 100 + 10 \cdot EC$$

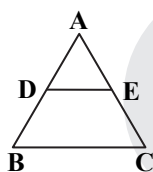
$$\Rightarrow 10 \cdot EC = 156 \Rightarrow EC = 15.6$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۷- پاسخ: گزینه ۲

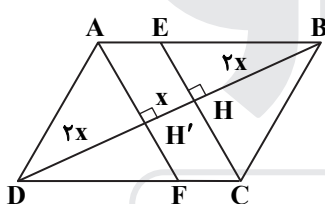
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۲)

نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر خطی، دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

با توجه به فرض سؤال، شکل روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:



$$\triangle AH'B : EH \parallel AH' \Rightarrow \frac{BH}{BH'} = \frac{EH}{AH'} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle DHC : FH' \parallel CH \Rightarrow \frac{DH'}{DH} = \frac{FH'}{HC} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه اگر $EH = 2y$ ، آنگاه $AH' = 3y$ ، $H'F = 2y$ و $HC = 3y$ خواهند بود.

حال مقدار خواسته‌شده سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{AECF}}{S_{\triangle EHB}} = \frac{x(2y + 3y)}{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y} = \frac{5xy}{2xy} = \frac{5}{2} = 2.5$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌مرس‌اند؛ به‌طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این

ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

نکته: سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

با توجه به فرض سؤال داریم: $BM = 12$ و $CM' = 9$.

حال با توجه به نکته داریم:

$$BM = 12 \Rightarrow HM = \frac{12}{3} = 4, BH = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$CM' = 9 \Rightarrow HM' = \frac{9}{3} = 3, CH = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

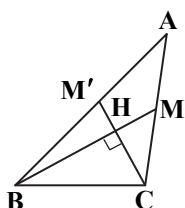
$$S_{\triangle BCH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BCH} = 3 \times 24 = 72$$

حال مساحت مثلث BCH را محاسبه می‌کنیم:

با توجه به نکته داریم:

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

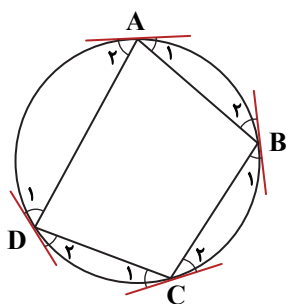


۲۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

با توجه به نکته داریم:



$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{\widehat{AB}}{2}, \quad \hat{A}_2 = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{B}_1 &= \frac{\widehat{BC}}{2}, \quad \hat{B}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{C}_1 &= \frac{\widehat{DC}}{2}, \quad \hat{C}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{D}_1 &= \frac{\widehat{AD}}{2}, \quad \hat{D}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}\end{aligned}$$

بنابراین مقدار خواسته شده سؤال برابر است با:

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 &= \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \\ &= \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{DC} + \widehat{AD} = 360^\circ\end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)

نکته: در مثلث ABC، ضلع روبه‌رو به زاویه A را با a نمایش داده و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A را با r_a نمایش می‌دهیم و

$$\text{داریم: } (P \text{ برابر با نصف محیط مثلث است.}) \quad r_a = \frac{S}{P-a}$$

همچنین، مماس‌های رسم شده از نقطه A بر دایره با هم برابرند و مجموع طول آن‌ها برابر با محیط مثلث ABC است.

نکته: در مثلث ABC که BC = a و AB = c و AC = b است، مساحت آن برابر است با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

$$\text{که در آن } P = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط است.}$$

با توجه به فرض سؤال و نکته داریم:

$$MT = MT' = 18 \Rightarrow 2P = 2MT = 36$$

$$2P = MN + MP + PN = 15 + 12 + PN = 36 \Rightarrow PN = 9$$

$$2P = 36 \Rightarrow P = 18$$

$$S_{\triangle MPN} = \sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)} = 54$$

$$r_m = \frac{S}{P-m} = \frac{54}{18-9} = \frac{54}{9} = 6$$

حال با توجه به نکته داریم:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته (قاعده هرون): برای پیدا کردن نقطه M روی خط d به‌طوری که AM + MB کمترین مقدار ممکن باشد، در صورتی که A و B در یک طرف

خط d واقع شده باشند، ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم و نقطه برخورد خط A'B با خط d جواب مسئله خواهد بود.

برای آن که محیط ABC حداقل شود، باید AC و BC حداقل شوند. طبق قاعده هرون، از نقطه A بر خط

d عمود کرده و به همان اندازه ادامه می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. حال A' را به B وصل می‌کنیم.

حال باید مقدار AC + BC را محاسبه کنیم. می‌دانیم که AC = A'C، پس:

$$AC + BC = A'C + BC = A'B$$

با توجه به شکل داریم:

$$A'B^2 = A'F^2 + BF^2$$

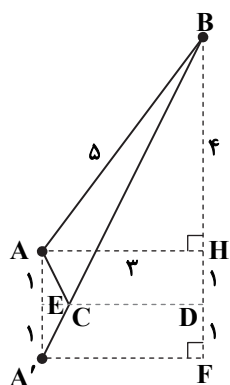
$$AE = 1 \Rightarrow HD = 1, \quad A'E = 1 \Rightarrow DF = 1$$

$$BH = 5 - HD = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

$$A'B^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow A'B = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

در نتیجه:

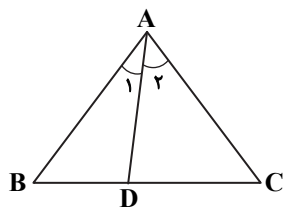
بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.



۳۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۳)

نکته: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



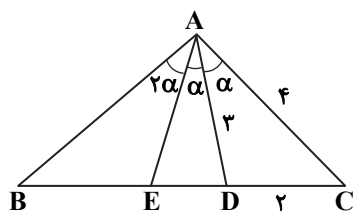
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ فرض}$$

$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

نکته: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو پاره‌خطی که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

با توجه به فرض سؤال اگر قرار دهیم $\hat{DAC} = \alpha$ ، آنگاه:

$$\hat{BAD} = 3\alpha$$



حال از نقطه A خطی رسم می‌کنیم که BD را در E قطع کند به‌طوری که $\hat{EAD} = \alpha$ و در نتیجه $\hat{BAE} = 2\alpha$.

حال مشاهده می‌شود که AD نیمساز مثلث AEC است، پس:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{DC}{ED} \Rightarrow \frac{4}{AE} = \frac{2}{ED} \Rightarrow AE = 2ED \quad (1)$$

$$AD^2 = AC \times AE - CD \times DE \Rightarrow 3^2 = 4 \times AE - 2 \times ED \xrightarrow{(1)} 9 = 8ED - 2ED = 6ED \Rightarrow ED = \frac{3}{2} \Rightarrow AE = 3$$

حال AE نیز در مثلث ABC نیمساز می‌باشد، پس:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{BE}{\frac{3}{2}} \Rightarrow BE = \frac{3}{8}AB \quad (2)$$

$$AE^2 = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow 3^2 = 4 \times AB - \frac{3}{8} \times BE \xrightarrow{(2)} 9 = 4AB - \frac{49}{16}AB$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{15}{16}AB \Rightarrow AB = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} \Rightarrow BE = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$$

حال مقدار خواسته‌شده سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$ABC \text{ محیط} = AB + AC + BE + EC = 9\frac{3}{5} + 4 + 8\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = 25\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$|A| = ad - bc$$

نکته: اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه:

$$|aA| = a^n |A| \quad (a \in \mathbb{Z})$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = (\log 25)^2 - (\log 4)^2 = (\log 25 - \log 4)(\log 25 + \log 4) = (\log \frac{25}{4})(\log 100) = 2 \log \frac{25}{4} = \log \frac{625}{16}$$

$$|A| = (10^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}) = 10^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} \log \frac{625}{16} \times 10^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{1}{2}} \log \frac{625}{16}$$

$$= 10^{\frac{3}{4}} \log \frac{625}{16} - 10^{\frac{1}{2}} \log \frac{625}{16} = \frac{25}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4} (\frac{5}{2} - 1) = \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{75}{8}$$

حال مقدار خواسته‌شده سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\left| \frac{1}{3}A \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^2 |A| = \frac{1}{9} \times \frac{75}{8} = \frac{25}{24}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت (خط هادی) در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط (کانون سهمی) در آن صفحه به یک فاصله باشند.

نکته: معادله سهمی‌ای که از رأس $S(h, k)$ عبور می‌کند و دهانه آن روبه بالا است، به صورت زیر می‌باشد:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

نکته: طول وتر کانونی سهمی برابر با $4a$ است.

با توجه به فرض‌های سؤال هم می‌توان دهانه سهمی را روبه بالا و هم روبه راست در نظر گرفت و خللی در انجام محاسبات ایجاد نمی‌شود. لذا دهانه سهمی را روبه بالا در نظر می‌گیریم.

$$(x-2)^2 = 4a(y+2)$$

سهمی‌ای که از رأس $(2, -2)$ می‌گذرد برابر است با:

چون نقطه $(-1, 1)$ روی سهمی قرار دارد، پس:

$$(-1-2)^2 = 4a(1+2) \Rightarrow 9 = 4a \times 3 \Rightarrow 4a = 3$$

در نتیجه طول وتر کانونی بر محور سهمی عمود می‌شود که همان وتر کانونی سهمی است برابر با $4a = 3$ می‌باشد.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر \vec{a}, \vec{b} در R^3 باشد، آنگاه: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

نکته: اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار ناصفر و θ زاویه بین آن‌ها باشد، آنگاه: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

نکته: مساحت متوازی‌الاضلاعی که با دو بردار \vec{a} و \vec{b} ساخته می‌شود، برابر است با: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 0 \Rightarrow \frac{9|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{27\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{7\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{2|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow 9 - \frac{20|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -20 \cos \theta = 12 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \left| \left(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right| = \left| \frac{9\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{7\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{2\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right| = \left| \vec{0} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{7\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \vec{0} \right| = \left| \frac{-13\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{13|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= 13 \sin \theta = 13 \times \frac{4}{5} = \frac{52}{5}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دایره * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r برابر است با: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

نکته: معادله خطی یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است که در آن مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است و شعاع آن

$$\text{برابر با } r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ است.}$$

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره بزرگ‌تر را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = a \Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-3, 1)$$

چون خط $y + 2x = 0$ بر دایره کوچک‌تر مماس است، پس شعاع آن برابر با فاصله مرکز آن تا خط d همچنین چون خط $y = -2x$ تقارن بین دو مرکز دایره محسوب می‌شود، پس:

$$O(-3, 1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } y = -2x} O'(1, 3)$$

$$\text{شعاع دایره کوچک‌تر} = \frac{|3 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r'$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ‌تر} = 2r' = r = 2\sqrt{5}$$

حال داریم:

$$r = 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{36+4+4a}}{2} \Rightarrow 36+4+4a=80 \Rightarrow a=10$$

حال معادله دو دایره را به دست می آوریم:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

حال این دو معادله را باز کرده و از هم کم می کنیم:

$$\begin{cases} (x^2 + 1 - 2x) + (y^2 + 9 - 6y) = 5 \\ (x^2 + 9 + 6x) + (y^2 + 1 - 2y) = 20 \end{cases} \xrightarrow{-} 8 + 8x - 8 + 4y = 15 \Rightarrow 8x + 4y = 15 \Rightarrow y = -2x + \frac{15}{4}$$

حال برای به دست آوردن طول نقاط برخورد دایره ها، باید $y = -2x + \frac{15}{4}$ را در معادله یکی از دایره ها قرار دهیم:

$$(x-1)^2 + (-2x + \frac{15}{4} - 3)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1 - 2x) + (4x^2 + \frac{9}{16} - 3x) = 5 \Rightarrow 5x^2 - 5x + \frac{25}{16} - 5 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 5x - \frac{55}{16} = 0$$

ریشه های این معادله برابر با طول نقاط برخورد دایره ها هستند و چون سؤال، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره را خواسته است، پس مقدار آن برابر است با:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{5} = 1$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۷- پاسخ: گزینه ۲

نکته: عدد صحیح a شمارنده عدد b است و b را عاد می کند هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که:

چون طبق فرض سؤال، $2a$ رقم است، پس a می تواند مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ را اختیار کند:

$$a = 1 \Rightarrow 1112 \Rightarrow \text{یک عدد } a \text{ را عاد می کند.}$$

$$a = 2 \Rightarrow 2224 \Rightarrow \text{دو عدد } a \text{ را عاد می کند.}$$

$$a = 3 \Rightarrow 3336 \Rightarrow \text{دو عدد } a \text{ را عاد می کند.}$$

$$a = 4 \Rightarrow 4448 \Rightarrow \text{سه عدد } a \text{ را عاد می کند.}$$

در نتیجه حداکثر ۳ عدد طبیعی می توان $a = 4$ را عاد کند.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * گسسته (درس ۳، فصل ۱)

۳۸- پاسخ: گزینه ۱

نکته: معادله سیاله $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می تواند به یک معادله هم نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b | ax - c \Rightarrow b | ax - c \Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0), \quad ax \equiv c \pmod{-b} \quad (b < 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$\xrightarrow{-a} \quad \xrightarrow{a} \quad by \equiv c, \quad by \equiv c$$

به طریق مشابه می توان نوشت:

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد. یعنی:

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

$$\text{نکته: } ac \equiv bc, \quad (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$

ابتدا معادله سیاله داده شده را ساده می کنیم:

$$76x + 124y = 364 \xrightarrow{+4} 19x + 31y = 91$$

حال معادله سیاله به دست آمده را به یک معادله هم نهشتی تبدیل می کنیم:

$$19x \equiv 91 \Rightarrow 19x - 31x \equiv 91 - 31 \Rightarrow -12x \equiv 60 \xrightarrow{(12, 31)=1} -x \equiv 5 \Rightarrow x \equiv -5 \Rightarrow x \equiv -5 + 31 \Rightarrow x \equiv 26$$

$$\Rightarrow x = 31k + 26 \xrightarrow{k=3} x = 119 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 1+1+9=11$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳۹- پاسخ: گزینه ۴۴

▲ مشخصات سؤال: ۴۴ * گسسته (درس ۲، فصل ۳)

نکته (اصل لانه کبوتری): اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

می‌دانیم که باقی‌مانده اعداد بر ۳ برابر با ۰، ۱، ۲ است. اعدادی را که باقی‌مانده آن‌ها بر ۳ برابر با یک است را در نظر می‌گیریم. این اعداد به صورت $3k+1$ هستند. اگر زوج‌های مرتب همگی به صورت $(3k+1, 3k'+1)$ باشند، هر دو زوج مرتبی که انتخاب کنیم، مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آن به صورت $(3t+2, 3t'+2)$ خواهند بود که مضرب ۳ نیستند. می‌دانیم که در مجموعه اعداد طبیعی بی‌نهایت عدد به صورت $3k+1$ وجود دارد. لذا بی‌نهایت زوج مرتب به این صورت می‌توان ساخت که در خواسته سؤال صدق نکنند. در نتیجه سؤال غلط است.

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: اگر G یک گراف با مرتبه P و اندازه q و $V = \{V_1, V_2, \dots, V_P\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q$$

نکته: اگر G یک گراف با مرتبه P و اندازه q باشد، آنگاه:

$$\delta(\bar{G}) = (P-1) - \Delta(G)$$

$$q(\bar{G}) = \left(\frac{P}{2}\right) - q(G)$$

برای آنکه حداقل تعداد یال را داشته باشیم، درجه رئوس باید کمترین مقدار ممکن باشند:

$$432 = 3^3 \times 2^4$$

با توجه به اینکه تعداد رئوس با درجه فرد در یک گراف باید زوج باشد، پس درجه رئوس گراف مدنظر برابر است با:

$$3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$$

با توجه به نکات داریم:

$$2q = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 18 \Rightarrow q = 9$$

$$q(\bar{G}) = \left(\frac{8}{2}\right) - 9 = \frac{8 \times 7}{2} - 9 = 19 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = (8-1) - 3 = 4$$

حال مقدار خواسته شده سؤال را به دست می‌آوریم:

$$q(\bar{G}) + \delta(\bar{G}) = 19 + 4 = 23$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = L_1 \times 1/2 \times 10^{-5} \times 50 \Rightarrow L_1 = \frac{3 \times 10^{-3}}{1/2 \times 10^{-5} \times 50} = 5 \text{ m}$$

۴۲- پاسخ: گزینه ۳

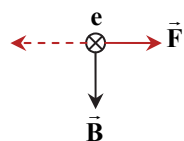
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

$${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^A_Z\text{X} + {}^4_2\alpha \Rightarrow \begin{cases} 238 = A + 4 \Rightarrow A = 234 \\ 92 = Z + 2 \Rightarrow Z = 90 \end{cases} \Rightarrow {}^{234}_{90}\text{X}$$

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

طبق قاعده دست راست داریم:



(دقت کنید چون بار ذره منفی است، جهت F برعکس می‌شود.)

۴۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1)$$

$$W'_t = \Delta K' = \frac{1}{2} m ((4v_0)^2 - (v_1)^2) = \frac{1}{2} m (16v_0^2 - v_1^2) = \frac{15}{2} m v_1^2 \xrightarrow{(1)} W'_t = 15 \times 120 = 1800 \text{ J}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرماسنج}} + Q'_{\text{آب}} = 0 \Rightarrow m_1 c_{\text{آب}} \Delta\theta_1 + C \Delta\theta + m_2 c_{\text{آب}} \Delta\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow 0.6 \times 4200 \times (36 - 20) + C(36 - 20) + 0.4 \times 4200 \times (36 - 80) = 0$$

$$\Rightarrow 6 \times 4200 \times 16 + 16C + 4 \times 4200 \times (-44) = 0 \Rightarrow 16C = 33600 \Rightarrow C = 2100 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۴

طبق صورت سؤال، فاصله دو متحرک از هم ۵ m است و متحرک دوم ۷ m از متحرک اول جلوتر است، با در نظر گرفتن مکان متحرک اول به عنوان مبدأ مکانی داریم:



$$|\Delta x_1 - \Delta x_2| = \left| vt - \frac{1}{2} (at^2 + v_0 t + x_0) \right| = 5$$

↑ حرکت شتابدار
↓ حرکت یکنواخت

$$\Rightarrow \left| 8t - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times t^2 - 7 \right) \right| = 5 \Rightarrow |8t - t^2 - 7| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 8t - t^2 - 7 = 5 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = 6s \end{cases} \\ 8t - t^2 - 7 = -5 \Rightarrow t^2 - 8t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 + \sqrt{14}s \\ t = 4 - \sqrt{14}s \end{cases} \end{cases}$$

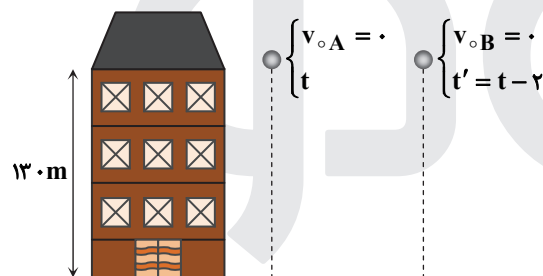
▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۳

گلوله دوم ۲ ثانیه دیرتر از گلوله اول رها می شود. طبق رابطه

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

برای هر دو گلوله داریم:

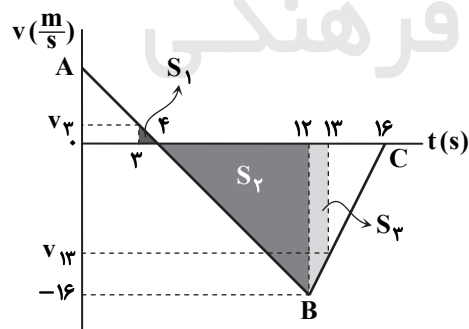


$$\begin{cases} y_A = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (5)^2 = -125 \text{ m} \\ y_B = -\frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = -45 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta y = |y_A - y_B| = |-125 - (-45)| = 80 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل شیب خط AB ثابت است؛ یعنی شیب در بازه ۳ تا ۴ ثانیه با شیب در بازه ۴ تا ۱۲ ثانیه یکسان است.



$$\frac{0 - v_3}{4 - 3} = \frac{-16 - 0}{12 - 4} \Rightarrow v_3 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

مساحت قسمت هاشور خورده به صورت زیر است:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{(12 - 4) \times 16}{2} = 65 \text{ m}$$

بنابراین متحرک در بازه زمانی ۳ تا ۱۲ ثانیه ۶۵ متر طی کرده است.

شیب خط BC نیز ثابت است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{v_{13} - (-16)}{13 - 12} = \frac{0 - (-16)}{16 - 12} \Rightarrow v_{13} + 16 = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow v_{13} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

مساحت دوزنقه (S_3) نشان دهنده مسافت طی شده در بازه زمانی ۱۲ تا ۱۳ ثانیه است:

$$S_3 = \frac{12 + 16}{2} \times (13 - 12) = 14 \times 1 = 14 \text{ m}$$

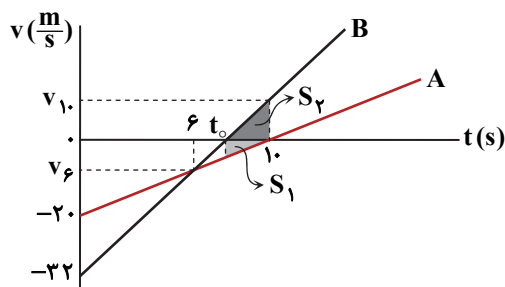
$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 = 65 + 14 = 79 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{79}{13 - 3} = 7.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

در بازه t_0 تا ۱۰ ثانیه سرعت متحرک B مثبت و سرعت متحرک A منفی است، یعنی در خلاف جهت هم حرکت می کنند. شیب خط A را محاسبه می کنیم:



$$\text{شیب خط A} = \frac{0 - (-20)}{10 - 0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_6 = a_A t + v_{0A} \Rightarrow v_6 = 2(6) - 20 = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال برای پیدا کردن v_{10} ، ابتدا شیب خط B را نوشته تا شتاب B را به دست آوریم:

$$\text{شیب خط B} = \frac{-8 - (-32)}{6 - 0} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_{10} = a_B t + v_{0B} \Rightarrow v_{10} = 4 \times 10 - 32 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

برای پیدا کردن t_0 ، کافی است v_B را برابر صفر قرار دهیم:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \Rightarrow 0 = 4 \times t_0 - 32 \Rightarrow t_0 = 8 \text{ s}$$

سرعت A در t_0 را محاسبه می کنیم:

$$v_A = 2 \times 8 - 20 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال اگر مساحت های S_1 و S_2 را محاسبه کنیم برابر فاصله دو متحرک در بازه زمانی است که خلاف جهت هم حرکت می کنند:

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{(10 - 8) \times (4)}{2} + \frac{8 \times (10 - 8)}{2} = 4 + 8 = 12 \text{ m}$$

چون دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می کنند، پس در بازه زمانی ۸ تا ۱۰ ثانیه به هم نزدیک می شوند و فاصله آنها کاهش می یابد.

۵۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

از رابطه $v = \frac{2\pi r}{T}$ ، کمک می گیریم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2}{1/57} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

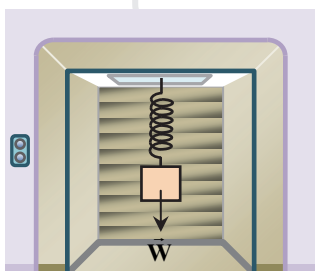
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(8)^2}{2} = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

در مدت نصف دوره اندازه سرعت ثابت است و فقط جهت آن عوض می شود؛ پس داریم:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m(v_2 - v_1) = 50 \times 10^{-3} (8 - (-8)) = 0.8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروهای وارد بر جسم را در راستای قائم رسم می کنیم. قانون دوم نیوتون را در راستای y می نویسیم:



$$F_{\text{net}, y} = ma \Rightarrow F_e - W = ma \Rightarrow F_e - 3 \times 10 = -6 \Rightarrow F_e = 24 \text{ N}$$

$$k\Delta x = 24 \Rightarrow 400(x_2 - 0.042) = 24 \Rightarrow x_2 = 48 \text{ cm}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

قبل از افزایش نیروی F، نیروی اصطکاک از نوع ایستایی است؛ بنابراین داریم:

$$F_{\text{net}, x} = 0 \Rightarrow F_e - f_s = 0 \Rightarrow F_e = f_s$$

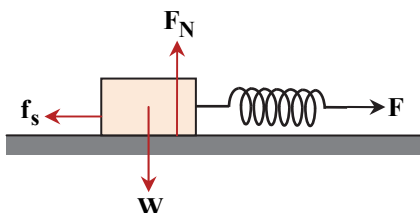
$$\Rightarrow k\Delta x = f_s \Rightarrow \mu_s F_N = k\Delta x \Rightarrow \mu_s = \frac{k\Delta x}{F_N} = \frac{400 \times 0.075}{50} = 0.6$$

وقتی جسم شروع به حرکت می کند، نیروی اصطکاک از نوع جنبشی است و داریم:

$$F_{\text{net}, x} = ma \Rightarrow F_e - f_k = ma \Rightarrow k\Delta x - \mu_k F_N = ma \Rightarrow \mu_k = \frac{k\Delta x - ma}{F_N} \Rightarrow \mu_k = \frac{400 \times 0.075 - 10}{50} = 0.4$$

خواسته سؤال:

$$\frac{\mu_s}{\mu_k} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}$$



۵۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

مساحت زیر نمودار $F-t$ بیانگر تغییر تکانه است، بنابراین در بازه ۱ تا ۵ ثانیه مساحت زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (1 \times (-2)) + (1 \times 2) + (1 \times 3) = 3 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$S = \Delta p \Rightarrow 3 = m \Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{3}{6/5} = \frac{m}{s}$$

حال برای محاسبه شتاب از تغییرات سرعت به دست آمده کمک می‌گیریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{5-1} = 1/5 \frac{m}{s^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۴- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{\lambda L} \Rightarrow f_1 = \frac{v}{\lambda L} \Rightarrow 500 = \frac{v}{2 \times 0.2} \Rightarrow v = 200 \frac{m}{s}$$

اکنون طول موج را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{200}{500} = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۵- پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم:

$$f_n - f_{n-1} = f_1 \Rightarrow 280 - 240 = 40 \text{ Hz} = f_1$$

نکته: بسامدهای تشدید تار باید مضربی از f_1 باشند، پس عددی که مضرب ۴۰ نیست، بسامد تشدید تار نیست.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۶- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار داریم:

$$\frac{3\lambda}{4} = 45 \Rightarrow \lambda = 0.3 \text{ m}$$

از رابطه $\lambda = vt$ دوره را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = vT \Rightarrow 0.3 = 4T \Rightarrow T = 0.075 \text{ s}$$

مسئله تندی متوسط نقطه M از لحظه ۰ تا ۰.۵ s را می‌خواهد؛ بنابراین این بازه را بر حسب T محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{T}{0.075} = \frac{t}{0.5} \Rightarrow t = \frac{2}{3}T$$

به کمک معادله مکان- زمان نوسانگر، مکان نوسانگر در لحظه $t = 0.5 \text{ s} = \frac{2}{3}T$ را به دست می‌آوریم:

$$y = A \cos \omega t = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow y = 0.02 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{2}{3}T\right) \Rightarrow y = 0.02 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -0.01 \text{ m} = -1 \text{ mm}$$

طبق نمودار نقطه M از مکان $y = 0$ شروع به حرکت کرده و به

$y = 2 \text{ mm}$ رسیده و سپس تا $y = -1 \text{ mm}$ پایین آمده است، پس:

$$\ell = 2 + 2 + 1 = 5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.01 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۷- پاسخ: گزینه ۳

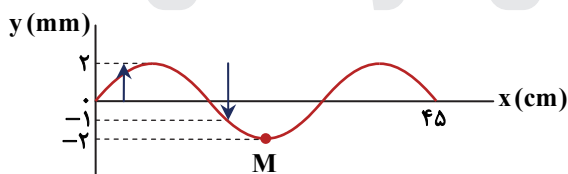
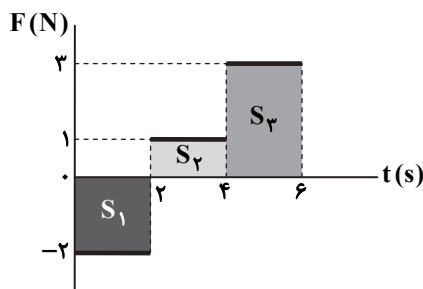
با استفاده از رابطه $\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}$ داریم:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log\left(\frac{I_A}{I_B}\right) \Rightarrow 11/5 = 10 \log\left(\frac{I_A}{I_B}\right) \Rightarrow 1/15 = \log\left(\frac{I_A}{I_B}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 10^{1/15} = 10^{1/15} \times 10^{1/15} = 10 \times 10^{2/15} = 10 \times 10^{2/15} = 10 \times \sqrt{10^{2/3}}$$

با توجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\log 2 = 0.3 \Rightarrow 10^{0.3} = 2 \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 10 \times \sqrt{2}$$



۵۸- پاسخ: گزینه ۱
طبق صورت سؤال:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{U_{\max}}{2} \\ K_1 = \frac{1}{2} \pi^2 \end{cases}$$

طبق پایستگی انرژی نوسانگر داریم:

$$E = U_1 + K_1 = \frac{U_{\max}}{2} + \frac{1}{2} \pi^2 \xrightarrow{E=U_{\max}} \frac{U_{\max}}{2} + \frac{1}{2} \pi^2 = U_{\max} \Rightarrow \frac{U_{\max}}{2} = \frac{1}{2} \pi^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} \pi^2 J$$

از رابطه انرژی نوسانگر داریم:

$$E = \frac{1}{2} \pi^2 m A^2 f^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} \pi^2 m A^2 f^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \pi^2 = \frac{1}{2} \pi^2 (\frac{1}{4}) A^2 (2)^2 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{2} m$$

حال معادله مکان- زمان نوسانگر را می نویسیم:

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cos(2\pi f t) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cos(4\pi t)$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۳
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)
در صورت سؤال گفته شده کوتاه ترین طول موج تابش شده: پس الکترون به مدار $n = \infty$ رفته است.
از رابطه ریدبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \frac{1}{1600} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n'^2} - 0 \right) \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{n'^2} \Rightarrow n' = 4$$

$n' = 4$ مربوط به رشته براکت است که در ناحیه فروسرخ قرار دارد.

۶۰- پاسخ: گزینه ۲
مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$P = \frac{nhc}{\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 10^{-3} = \frac{n \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{663 \times 10^{-9} \times 1} \Rightarrow n = 10^{15}$$

از معادله توان استفاده می کنیم:

۶۱- پاسخ: گزینه ۳
مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) نیروی هسته ای کوتاه برد است و تنها در فاصله ای کوچک تر از ابعاد هسته اثر می کند و خارج از این فاصله صفر است.

(۲) با توجه به نمودار «Z-N» نیروی هسته ای با تعداد نوکلئون ها رابطه مستقیم ندارد.

(۴) نیروی هسته ای همیشه از نوع جاذبه است.

۶۲- پاسخ: گزینه ۴
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

$$\begin{cases} C_1 = \frac{q_1}{V_1} \Rightarrow 25 V_1 = q_1 \quad (*) \\ C = C_1 = C_2 = \frac{q_2}{V_2} \Rightarrow 25 = \frac{q_1 + 50}{V_1 + \frac{1}{2} V_1} = \frac{q_1 + 50}{\frac{3}{2} V_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 25 \left(\frac{1}{2} V_1 \right) = q_1 + 50 \xrightarrow{(*)} 25 \times \frac{1}{2} V_1 = 25 V_1 + 50 \Rightarrow V_1 = 10 V$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} V_1 = \frac{3}{2} V_1 = \frac{3}{2} (10) = 15 V$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C V_2^2 = \frac{1}{2} \times 25 \times (15)^2 = 2812.5 J = 2.8125 kJ$$

حالا انرژی خازن را در حالت دوم محاسبه می کنیم:

۶۳- پاسخ: گزینه ۱
مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در این سؤال تنها نیروی الکتریکی روی پروتون کار انجام می دهد.

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی می نویسیم:

$$W_E = \Delta K \Rightarrow qEd \cos \theta_1 = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow e \times 10^3 \times d \times (-1) = \frac{1}{2} m (0^2 - (2 \times 10^4)^2) \Rightarrow ed = 2 \times 10^5 m \quad (1)$$

حال قضیه کار و انرژی جنبشی را برای حالت دوم می نویسیم:

$$W'_E = \Delta K' = qEd \cos \theta_2 = \frac{1}{2} m (v_f'^2 - v_i'^2) \Rightarrow e \times 10^3 \times d \times (+1) = \frac{1}{2} m (v_f'^2 - (2 \times 10^4)^2)$$

$$\Rightarrow ed \times 10^3 = \frac{1}{2} m (v_f'^2 - (4 \times 10^8)) \xrightarrow{(1)} 2 \times 10^5 \times m \times 10^3 = \frac{1}{2} m (v_f'^2 - 4 \times 10^8)$$

$$\Rightarrow v_f'^2 = 8 \times 10^8 \Rightarrow v_f' = 2\sqrt{2} \times 10^4 \frac{m}{s}$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

ابتدا مؤلفه‌های میدان \vec{E} را روی شکل مشخص می‌کنیم:با توجه به مؤلفه‌های میدان متوجه می‌شویم بار q_1 منفی و بار q_2 مثبت است.

$$E_1 = E_x = \frac{kq_1}{r_1^2} \Rightarrow 4/5 \times 10^5 = \frac{kq_1}{(1/2)^2} \Rightarrow kq_1 = 12 \times 12 \times 45 \times 10^2 \quad (1)$$

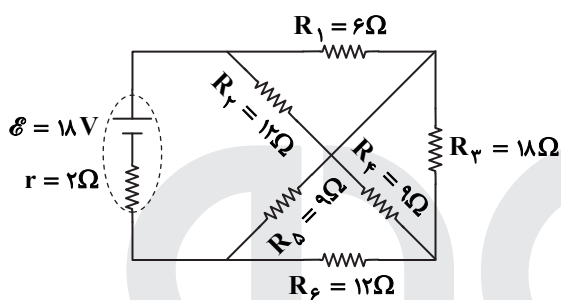
$$E_2 = E_y = \frac{kq_2}{r_2^2} \Rightarrow 8 \times 10^5 = \frac{kq_2}{(0/45)^2} \Rightarrow kq_2 = 8 \times 45 \times 45 \times 10 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ تقسیم بر } (2)} \left| \frac{kq_1}{kq_2} \right| = \frac{12 \times 12 \times 45 \times 10^2}{8 \times 45 \times 45 \times 10^1} = 4 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -4$$

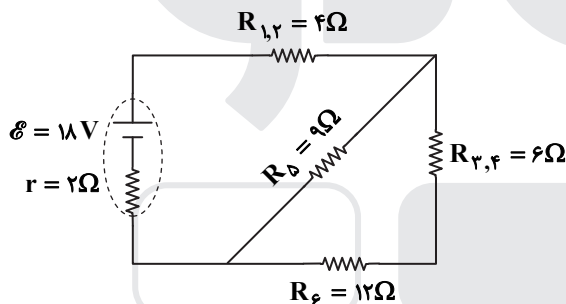
۶۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

ابتدا مقاومت معادل را به دست می‌آوریم:

مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی‌اند و مقاومت معادل آن‌ها به صورت زیر است:

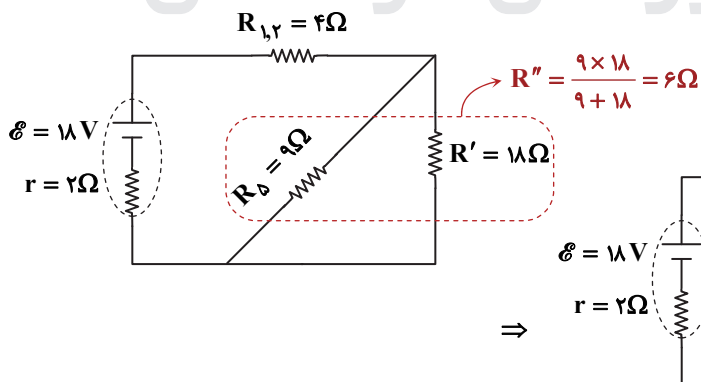
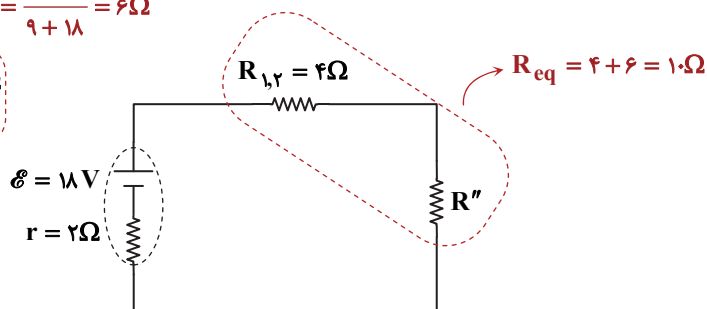
$$R_{1,2} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\Omega$$

مقاومت‌های R_3 و R_4 هم موازی‌اند؛ بنابراین داریم:

$$R_{3,4} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6\Omega$$

مقاومت‌های $R_3,4$ و R_6 به صورت متوالی بسته شده‌اند:

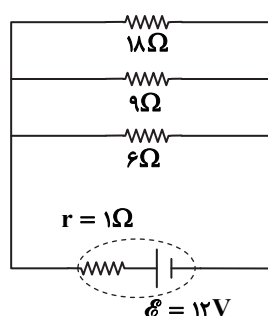
$$R' = 12 + 6 = 18\Omega$$

 \Rightarrow 

$$I_{eq} = \frac{E}{r + R_{eq}} = \frac{18}{2 + 10} = \frac{3}{2} A$$

$$\text{اختلاف پتانسیل دو سر باتری} = 18 - Ir = 18 - \frac{3}{2} \times 2 = 15 V$$

۶۶- پاسخ: گزینه ۱



جریانی از ولت سنج عبور نمی‌کند؛ زیرا مقاومت آن بی‌نهایت است، پس مدار را به‌صورت زیر و با در نظر گرفتن نقاط هم‌پتانسیل ساده می‌کنیم:

نکته: جریانی که از آمپرسنج می‌گذرد، جریان عبوری از کل مدار است.

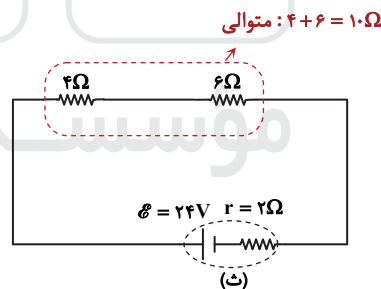
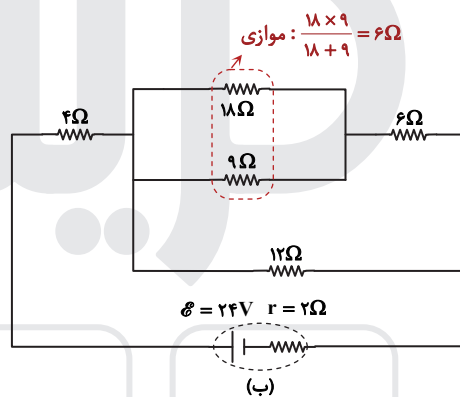
$$I_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{12}{3 + 1} = 3A$$

اختلاف پتانسیل در هر باتری برابر است با:

$$I_A = I_{eq} - I_{\xi\Omega} = 3 - 1/5 = 1/5 A$$

۶۷- پاسخ: گزینه ۲

در حالت اول کلید (۲) هنوز وصل نشده است، مدار را به صورت زیر ساده می‌کنیم:



$$I_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{24}{1.0 + 2} = 2A$$

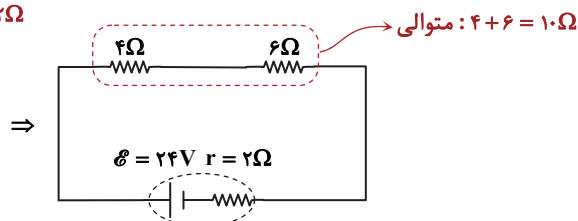
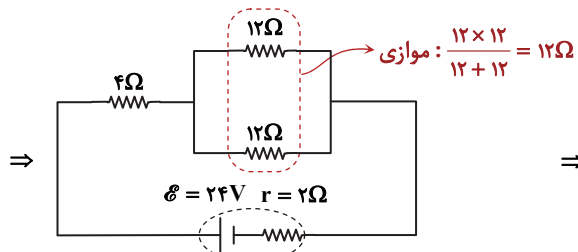
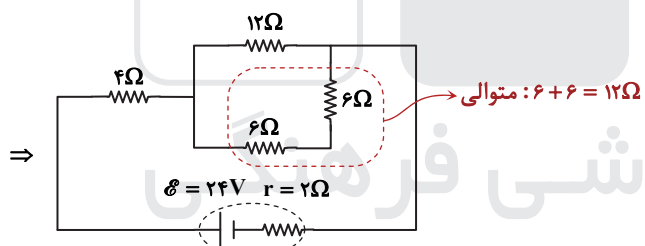
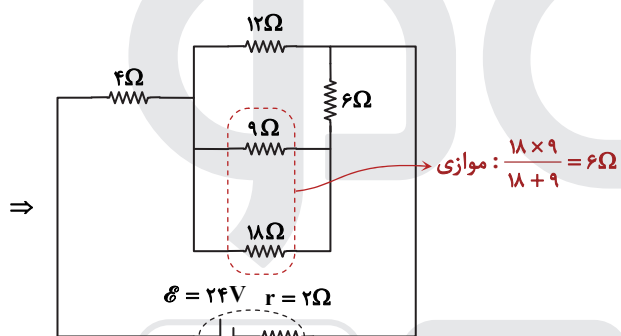
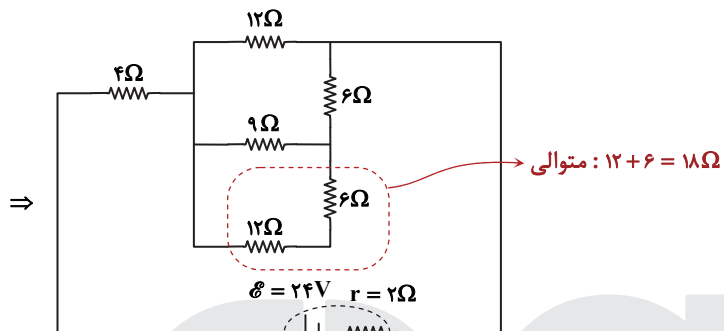
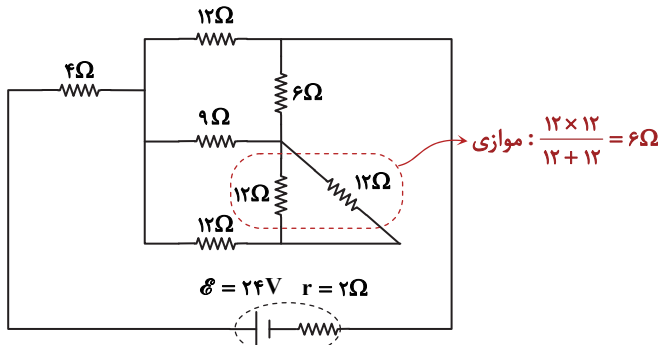
طبق شکل (ت) جریان $2A$ به‌طور مساوی بین مقاومت‌های 12Ω ای تقسیم می‌شود و طبق شکل (ب) جریان $1A$ بین مقاومت‌های 9Ω و 18Ω به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود.

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_{\lambda\Omega}}{I_{\lambda\Omega}} &= \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma I_{\lambda\Omega} = I_{\lambda\Omega} \\ I_{\lambda\Omega} + I_{\lambda\Omega} &= 1A \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_{\lambda\Omega} = \frac{1}{2}A, I_{\lambda\Omega} = \frac{1}{2}A$$

$$\text{الف شكل الف: } I_{18\Omega} = I_{6\Omega} \Rightarrow I_{6\Omega} = \frac{1}{3} A$$

$$P_{\rho\Omega} = RI_{\rho\Omega}^{\gamma} = \rho \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma} = \frac{\rho}{9} W$$

در حالت دوم اتصال (۱) قطع شده و فقط اتصال (۲) وصل می‌شود:



$$I'_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} = \frac{24}{10 + 2} = 2A$$

$$I'_{6\Omega} = 1A$$

$$P'_{6\Omega} = R_{6\Omega} I'^2_{6\Omega} = 6 \times (1)^2 = 6W$$

مطابق توضیحات حالت قبل داریم:

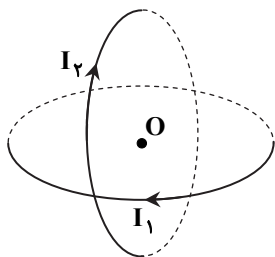
$$\frac{P'_{6\Omega}}{P_{6\Omega}} = \frac{6}{\frac{6}{9}} = 9$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

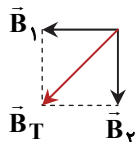
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

ابتدا با استفاده از قاعده دست راست، میدان مغناطیسی حاصل از هر کدام از حلقه‌ها در نقطه O را به دست می‌آوریم. جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ۱ در نقطه O به سمت پایین است.

جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ۲ در نقطه O به سمت چپ است.



دو میدان برهم عمود می‌باشند و برآیند آن‌ها \vec{B}_T به صورت مقابل است:



میدان‌های \vec{B}_1 و \vec{B}_2 با هم برابرند؛ زیرا جریان عبوری از آن‌ها و شعاع آن‌ها یکسان است:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 N I_1}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1 \times 2}{2 \times 0.2} = 6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2} B_1 = 6\sqrt{2} \times 10^{-6} \text{ T}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴

مؤلفه میدان که هم‌راستای محور Y است شار ایجاد نمی‌کند؛ زیرا زاویه این مؤلفه با نیم خط عمود بر سطح ۹۰ درجه است و تنها مؤلفه‌ای که در راستای X است شار ایجاد می‌کند.

$$\Phi = AB \cos \theta \Rightarrow \Phi = 4 \times 10^{-2} \times 0.5 \times 1 = 2 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۷۰- پاسخ: گزینه ۳

تغییرات شار نسبت به زمان را به دست می‌آوریم و می‌دانیم که تغییرات شار ناشی از تغییرات میدان مغناطیسی است:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = A \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = 15 \times 10^{-4} \times 1 \times (-0.1) \Rightarrow \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -15 \times 10^{-5} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

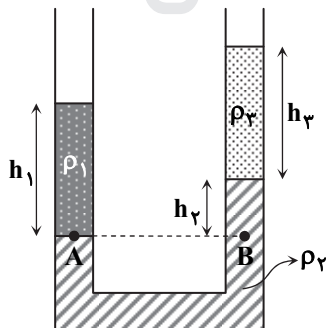
اکنون جریان القایی را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t} = \frac{-400}{0.2} \times (-15 \times 10^{-5}) = 0.3 \text{ A}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۱- پاسخ: گزینه ۲

فشار نقاط هم تراز A و B را می‌نویسیم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$$

$$\Rightarrow P_0 + \rho_1 g (20) = P_0 + \rho_2 g (5) + \rho_3 g (20)$$

$$\Rightarrow \rho_1 (20) = \rho_2 (5) + \rho_3 (20) \xrightarrow{\rho_1 = 2\rho_3} 20\rho_1 = 5\rho_2 + 20\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 10\rho_1 = 5\rho_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۲- پاسخ: گزینه ۳

از روابط فشار داریم:

$$\begin{cases} P = \frac{F}{A} \\ P = \rho g h + P_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{A} = \rho g h + P_0 \Rightarrow \frac{73200}{1200 \times 10^{-4}} = 1020 \times 10 \times h + 10^5 \Rightarrow h = \frac{610000 - 100000}{10200} = 0.5 \times 10^2 = 50 \text{ m}$$

۷۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$W_{mg} = \Delta K$$

تنها نیرویی که روی توپ‌ها کار انجام می‌دهد نیروی وزن است؛ طبق قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:
الف) با توجه به اینکه ارتفاع توپ‌های (۱) و (۲) در حال کاهش است؛ بنابراین $\Delta K > 0$ است.

$$\Delta K > 0 \Rightarrow v > v'$$

و مورد «الف» درست است و در نتیجه مورد «ب» نادرست است.

مورد «پ»: با توجه به اطلاعات مسئله توپ‌ها از ارتفاع یکسان و با تندی برابر پرتاب شده‌اند؛ بنابراین داریم:

$$K_1 = K_2 = K_3$$

$$W_{mg_1} = W_{mg_2} = W_{mg_3} = mgh = \Delta K_1 = \Delta K_2 = \Delta K_3 \Rightarrow K'_1 = K'_2 = K'_3 \Rightarrow v'_1 = v'_2 = v'_3$$

بنابراین مورد «پ» نیز درست است.

۷۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

به بررسی فرایندهای AB، BC و CA می‌پردازیم:

فرایند AB انبساط هم‌فشار است، پس در نمودار «V-T» به صورت خطی است که از مبدأ می‌گذرد.

فرایند BC هم‌حجم است و دما و فشار در آن کاهش می‌یابد.

فرایند CA هم‌دما است؛ بنابراین موازی محور V رسم می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۵- پاسخ: گزینه ۳

طبق رابطه $n = \frac{m}{M}$ داریم:

$$\begin{cases} n_1 = \frac{m_1}{M} \Rightarrow m_1 = n_1 M \\ n_2 = \frac{m_2}{M} \Rightarrow m_2 = n_2 M \end{cases} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow n_2 = \frac{4}{5} n_1$$

$m_2 = \frac{4}{5} m_1$: جرم گاز باقی‌مانده

$$n_1 - n_2 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{P_2 V_2}{RT_2} \Rightarrow n_1 - \frac{4}{5} n_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{P_2 V_2}{RT_2} \xrightarrow{n = \frac{P_1 V_1}{RT_1}} \frac{1}{5} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} \right) = \frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{P_2 V_2}{RT_2} \Rightarrow \frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{4}{5} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} \right)$$

$$\xrightarrow{V_1 = V_2} \frac{P_2}{T_2} = \frac{4}{5} \left(\frac{P_1}{T_1} \right) \Rightarrow P_2 = \frac{4}{5} \frac{P_1 T_2}{T_1} \xrightarrow{P_1 = P_0 + P_{g,1}} P_2 = \frac{4}{5} \times \frac{(3 \times 10^5 + 10^5) \times 300}{320} = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{g,2} = P_2 - P_0 = 3 \times 10^5 - 10^5 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

$${}^e e(n=4, l=1) \Rightarrow {}^4 p^6$$

$$x^{2-}: {}^4 p^6 \Rightarrow X = [{}_{18} \text{Ar}] 3d^1 4s^2 {}^4 p^4$$

$$p = 18 + 10 + 2 + 4 = 34$$

$$e = 36 \Rightarrow n = 36 + 9 = 45$$

$$\Rightarrow A = n + p = 34 + 45 = 79$$

عنصر X، در گروه ۱۶ است (np^4)، پس با عناصر ۸، ۱۶، ۵۲، ۸۴، ۱۱۶ هم‌گروه است.

$$34 = 36 - 2$$

$$16 = 18 - 2$$

۷۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

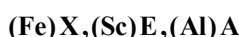
هر فلز رنگ و طیف نشری خطی مخصوص خود را دارد و اختلاف انرژی آن‌ها (که کمیتی کوانتومی است) و مقداری ثابت است.

در مورد گزینه‌های ۲ و ۳: رنگ شعله به فلز یا کاتیون نمک سازنده وابسته است.

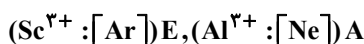
گزینه ۴: انرژی نور زرد (مربوط به سدیم) از قرمز (مربوط به لیتیم) بیشتر است.

۷۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

یون ها با بار ۳ مثبت:



یون های سه مثبت با آرایش گاز نجیب:



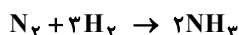
۷۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

سطح انرژی CO از CO_۲ بالاتر و نسبت به آن ناپایدارتر است.

۸۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

بررسی سایر گزینه ها:

(۲) باید از هر اتم در دو طرف، تعداد برابر وجود داشته باشد، لزوماً شمار مولکول ها یکسان نیست. مثلاً:



(۳) نباید ضریب کسری داشته باشیم. بلکه ضرایب باید ساده ترین نسبت طبیعی را داشته باشند.

(۴) شکر در این فرایند دچار سوختن می شود و این یک تغییر شیمیایی است.

در مورد گزینه ۱: بهتر بود این جمله این چنین نوشته می شد: «یک معادله موازنه شده، نسبت شمار مول ها یا مولکول...»

۸۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

ابتدا دو واکنش را موازنه می کنیم:



$$\text{گازهای معادله اول: } 1N_2 + 4H_2O = 1 \times 28 + 4 \times 18 = 100 \frac{g}{mol}$$

$$\text{گازهای معادله دوم: } 1CO_2 + 1H_2O = 44 + 18 = 62 \frac{g}{mol}$$

می توانیم مقدار گاز حاصل از دو واکنش را برابر قرار دهیم:

$$xg(NH_4)_2Cr_2O_7 \times \frac{1mol(NH_4)_2Cr_2O_7}{252g(NH_4)_2Cr_2O_7} \times \frac{100g \text{ گاز}}{1mol(NH_4)_2Cr_2O_7}$$

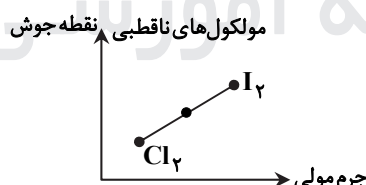
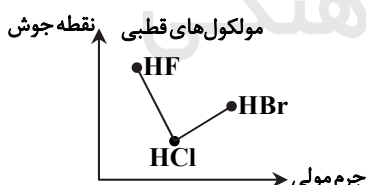
$$\Rightarrow 25/2g NaHCO_3 \times \frac{1mol NaHCO_3}{84g NaHCO_3} \times \frac{62g \text{ گاز}}{2mol NaHCO_3} \Rightarrow \frac{x}{252} \times 100 = \frac{25/2}{84} \times \frac{62}{2} \Rightarrow x \cong 2/5 \times 9/3 \cong 23$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

(۱) نادرست: مولکول های جور هسته همگی ناقطبی هستند. نقطه جوش آن ها به جرم مولی وابسته است.

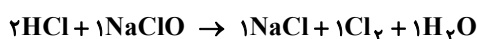
(۲) در بین مولکول های قطب باید پیوند هیدروژنی را نیز در مولکول HF به حساب آورد. پس فقط نمی توان جرم مولی را بررسی کرد.

(۳) نادرست



(۴) نادرست؛ فقط Br_۲(l) است. I_۲(s) و بقیه گاز هستند. نقطه جوش HF، ۱۹°C است و از دمای اتاق (۲۵°C) کمتر است.

۸۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



$$200 \text{ mL NaClO} \times \frac{1g}{1 \text{ mL NaClO}} \times \frac{18625g NaClO}{106g} \times \frac{1mol NaClO}{74.5g NaClO} \times \frac{2mol HCl}{1mol NaClO} \times \frac{1L HCl}{0.8mol HCl} \times \frac{1000 \text{ mL HCl}}{1L HCl}$$

$$= \frac{2 \times 18625 \times 2}{74.5 \times 8} = \frac{18625}{149} = 125 \text{ mL HCl}$$

کمک محاسباتی:

$$18625 = 18/625 \times 10^3 = (18 + \frac{5}{8}) \times 10^3 = \frac{149}{8} \times 10^3$$

۸۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

عبارت اول: نادرست؛ ممکن است در سمت راست فلز همچنان یک فلز یا شبه فلز باشد. قطعاً در سمت راست فلز در دوره نافلز وجود دارد ولی همه آن‌ها نافلز نیستند.

عبارت دوم: نادرست؛ کافی است، یکی از عناصر کلر یا فلوئور را در نظر بگیریم که هر دو گازهای فعال و هم‌گروه هستند.

عبارت سوم: نادرست؛ دسته s دارای ۱۴ عنصر (۷×۲) است که با کم کردن H و He، دارای ۱۲ فلز است. عناصر گازی غیر نجیب جدول

عبارتند از H_۲، N_۲، O_۲، Cl_۲، F_۲. پس $\frac{۱۲}{۵} \neq ۳$

عبارت چهارم: نادرست؛ آخرین فلز دوره چهارم ^{۳۱}Ge است. (پس از آن ^{۳۲}Ge شبه فلز است).

$$۳۱ - ۲۴ = ۷$$

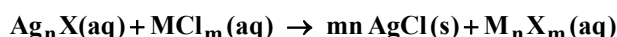
$$۷ \neq ۶$$

نخستین نافلز دوره دوم: C

۸۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

دو نمک واکنش‌دهنده یکی دارای کاتیون Ag⁺ و دیگری آنیون Cl⁻ است. پس می‌توان واکنش جابه‌جایی دوگانه را به صورت کلی و فرضی زیر در نظر گرفت:



(۱) نادرست؛ بسته به مقدار m و n هر ضریبی از واکنش‌دهنده‌ها می‌تواند باشد.

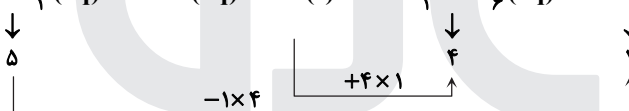
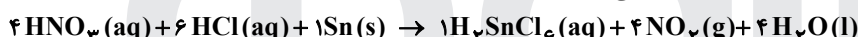
(۲) نادرست؛ بر اساس انحلال‌پذیری داده شده در صورت سؤال واکنش‌دهنده‌های محلول هستند و AgCl در آب نامحلول است.

(۳) نادرست؛ چون AgCl (S < ۱۰^{-۲}) در آب نامحلول است. به راحتی به حد انحلال‌پذیری خود می‌رسد و احتمالاً سیر شده است.

(۴) درست؛ واکنش‌دهنده‌ها همگن و فراورده‌ها ناهمگن هستند.

۸۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



$$۸۹/۲۵ \text{ g Sn} \times \frac{۱ \text{ mol Sn}}{۱۱۹ \text{ g Sn}} \times \frac{۴ \text{ mol NO}_2}{۱ \text{ mol Sn}} \times \frac{۴۶ \text{ g NO}_2}{۱ \text{ mol NO}_2} \times \frac{x}{۱۰۰} = ۱۲۴/۲ \text{ g NO}_2 \Rightarrow ۳ \times \frac{۱}{۴} \times ۴ \times \frac{x}{۱۰۰} = ۲/۷ \Rightarrow x = ۷۹\%$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

(۱) ذخایر کف اقیانوسی بیشتر از ذخایر زمینی است.

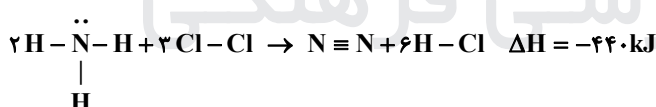
(۲) ترمیت گرماده است که باعث تولید Fe(l) می‌شود.

(۳) واکنش‌پذیری Na > Fe بیشتر است، اما صرفه اقتصادی ندارد.

(۴) واکنش‌پذیری Ag < Fe کمتر است. اصلاً واکنش Ag با Fe_۲O_۳ انجام نمی‌شود.

۸۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)



$$(۶x + ۳ \times ۲۴۰) - (۲/۴x + ۶ \times ۴۳۰) = -۴۴۰ \Rightarrow ۳/۶x = ۱۴۲۰ \Rightarrow x = ۳۹۴ \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

۸۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

شکل ۱۳- صفحه ۳۰ کتاب درسی

■ حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود، به عنوان سوخت در وسایل نقلیه استفاده می‌شود.

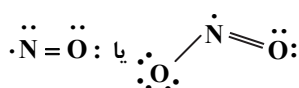
■ بخش اعظم نیم دیگر آن برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز ما به کار می‌رود.

■ کمتر از ده درصد از نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف و پارچه، شوینده‌ها، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ، پلاستیک، مواد منفجره و لاستیک به کار می‌رود.

۹۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

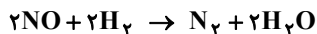
رادیکال‌ها غیر هشت تایی هستند، مثلاً:



۹۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

دقت کنیم که سرعت واکنش، خود عددی مثبت است، پس NO و H_2 که عدد منفی در کسر تغییر غلظت آن‌ها نسبت به زمان ضرب شده واکنش دهنده هستند.



$$3 = 2 + 1 = \text{مجموع ضرایب فراورده}$$

۹۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$\frac{16}{8} \text{LCO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{22.4 \text{ LCO}_2} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{100 \text{ g CaCO}_3}{1 \text{ mol CaCO}_3} = 75 \text{ g CaCO}_3 \text{ مصرف شده}$$

$$18 / 75 + 75 = 93 / 75 \text{ g CaCO}_3 \text{ اولیه}$$

$$\% \text{CaCO}_3 = \frac{75}{93 / 75} \times 100 = \% 80$$

$$R_{\text{واکنش}} = \frac{R_{\text{CO}_2}}{1} = \frac{16 / 8 \text{ L} \times \frac{1 \text{ mol}}{22.4 \text{ L}}}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 2 / 5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

۹۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$\text{حجم اولیه} = V_1 = 200 \text{ mL}$$

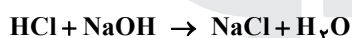
$$\text{غلظت اولیه} = M_1 = 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$\text{آب افزوده شده} = x \text{ mL}$$

$$\text{غلظت ثانویه} = M_2$$

$$\text{غلظت اسید} = M_3$$

$$200 \times 0.2 = (200 + x) \times M_3 \Rightarrow M_3 = \frac{4}{200 + x} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



$$10 \text{ mL HCl} \times \frac{M_3 \text{ mol}}{1 \text{ L}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol HCl}} \times \frac{1 \text{ L}}{4 \text{ mol NaOH}} = 20 \text{ mL} \Rightarrow M_3 = \frac{8}{200 + x}$$

حالا اعداد گزینه‌ها را به جای x و M_3 جای گذاری کنید تا گزینه درست یافت شود.

(۲)

$$0.1 = \frac{8}{200 + 60}$$

۹۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

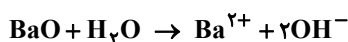
(۱) درست؛ هر دو در آب به صورت دو مولکولی حل می‌شوند.

(۲) درست

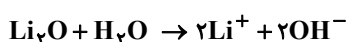
$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$0.1 = \frac{M \times 0.1}{0.9} \Rightarrow M = 0.9$$

(۳) نادرست



$$\frac{(0.1 \text{ mol BaO} \times \frac{2 \text{ mol Ion}}{1 \text{ mol BaO}})}{0.5 \text{ L}} = 0.4 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$



$$\frac{(0.1 \text{ mol Li}_2\text{O} \times \frac{4 \text{ mol Ion}}{1 \text{ mol Li}_2\text{O}})}{0.5 \text{ L}} = 0.8 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(۴) درست

$$V \uparrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [H^+] \downarrow \\ [OH^-] \downarrow \end{array} \right. \Rightarrow [H^+] \uparrow \Rightarrow \text{pH} \downarrow$$

اما K_a فقط تابع دما است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۱

عبارت اول: درست

عبارت دوم: نادرست؛ $Mg(OH)_2$ محلول نیست. در آب حل نمی‌شود و شیر منیزی یک سوسپانسیون است.

عبارت سوم: درست

عبارت چهارم: نادرست؛ اولاً آرنیوس ربطی به pH ندارد. با مدل آرنیوس فقط اسید و باز را شناسایی می‌کنیم یا ثانیاً در شرایط یکسان pH به قدرت اسیدی و تعداد هیدروژن‌های اسیدی بستگی دارد. نه هر تعداد H که در ترکیب است.

عبارت پنجم: نادرست؛ ویژگی‌های اسید و باز قبل از آرنیوس شناخته شده بود، اما آرنیوس نخستین کسی بود که آن‌ها را بر مبنای علمی تعریف کرد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۶- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دقت کنیم که:

$$1/2 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{80 \text{ g}} = 15 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$M_{DOH} = \frac{15 \times 10^{-3} \text{ mol}}{\frac{1}{4} \text{ L}} = 6 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(۱) نادرست

$$[OH^-] = M\alpha = 6 \times 10^{-2} \times \frac{20}{100} = 12 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-3}} = \frac{1}{12} \times 10^{-11} = 8/3 \times 10^{-13}$$

(۲) درست

$$\left. \begin{array}{l} M_{HA} = 12 \times 10^{-3} \\ \alpha_{HA} = 12 \times 10^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow [H^+]_{HA} = 12 \times 10^{-3} = [OH^-]_{DOH}$$

(۳) نادرست؛ ۰/۳ تغییر pH یعنی غلظت OH^- دو برابر شود. در شرایط جدید ۲g باز نسبت به ۱/۲g اولیه کمتر از دو برابر است. پسحتی اگر $\alpha = 1$ باشد و باز قوی باشد، تغییر $[OH^-]$ به دو برابر نمی‌رسد. پس حتماً گزاره نادرست است. اگر مایلید سؤال را دقیق حلکنید لازم است، ابتدا K_b را در محلول اولیه حساب کنید و سپس $[OH^-]$ آن و $[H^+]$ و pH را در حالت جدید به دست آورید. ولی

اعداد اصلاً رند و قابل محاسبه نیست.

(۴) نادرست

$$50 \text{ mL} \times \frac{6 \times 10^{-2} \text{ mol DOH}}{1 \text{ L}} = 3 \times 10^{-3} \text{ mol DOH}$$

$$50 \text{ mL} \times \frac{0.02 \text{ mol HCl}}{1 \text{ L}} = 1 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}$$

مقدار DOH بیشتر است و محلول پایانی خاصیت بازی دارد.

رد دقیق گزینه ۳:

محاسبه K_b :

$$K_b = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{6 \times 10^{-2} \times (0.02)^2}{1-0.02} = \frac{24 \times 10^{-4}}{8 \times 10^{-1}} = 3 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

غلظت DOH جدید:

$$M = \frac{(1/2 + 0.08) \text{ g}}{\frac{1}{4} \text{ L}} = \frac{80 \text{ g}}{80} = 0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]} \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = \frac{x^2}{0.1 - x} \Rightarrow x^2 = 3 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-3} x \Rightarrow x^2 + 3 \times 10^{-3} x - 3 \times 10^{-4} = 0$$

$$x = \frac{-3 \times 10^{-3} \pm \sqrt{9 \times 10^{-6} + 12 \times 10^{-4}}}{2} \cong \frac{-3 \times 10^{-3} \pm \sqrt{12 \times 10^{-4}}}{2} = \frac{-3 \times 10^{-3} \pm 3/5 \times 10^{-2}}{2} = 32 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{1}{32} \times 10^{-11} \Rightarrow \text{pH} = 11 + 5 \log 2 = 12/5$$

حالا pH اولیه:

$$[H^+] = \frac{1}{12} \times 10^{-11} \Rightarrow \text{pH} = 11 + 0.6 + 0.5 = 12/5$$

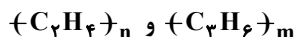
$$\Delta \text{pH} = 0.4 \neq 0.3$$

۹۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

(۱) نادرست؛ اغلب مونومرها گاز هستند. در همین مورد C_2F_4 و C_2H_4 هر دو گاز هستند.

(۲) نادرست؛ بستگی به تعداد واحد تکرار شونده دارد.



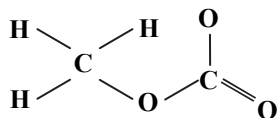
(۳) نادرست؛ نه لزوماً پلیمری شدن استیرن یا تولید پلی استر و پلی آمید این چنین نیست.

(۴) درست؛ سلولز و نشاسته هر دو دارای مونومر گلوکز با فرمول $C_6H_{12}O_6$ هستند.

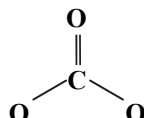
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۸- پاسخ: گزینه ۱

الف) نادرست

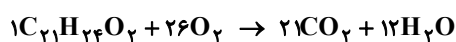


$$4 - 6 = -2 \quad 4 - 3 = 1$$

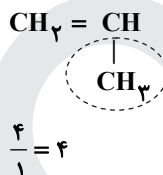
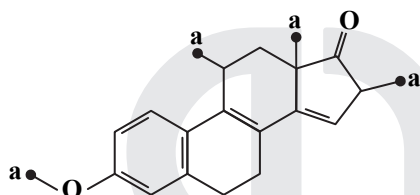


$$4 - 2 = +2$$

(ب) درست؛ ترکیب دارای ۲۱ کربن است. پس آلکان معادل آن به صورت $C_{21}H_{44}$ است. همچنین دارای ۶ پیوند دوگانه و ۴ حلقه است که هر کدام دو هیدروژن (مجموعاً ۱۰ هیدروژن) باید از فرمول کم کنیم.

(پ) درست؛ در شکل گروه‌های CH_3 با حرف a مشخص شده است و ۴ عدد می‌باشد.

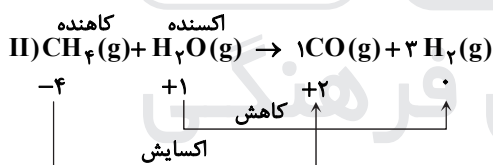
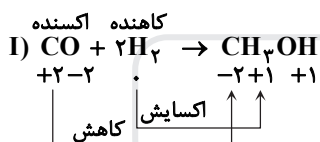
در مونومر پلی پروپین، یک گروه متیل وجود دارد:

(ت) نادرست؛ ترکیب دارای ۵ $C=C$ است و با ۵ مول H_2 سیر می‌شود.

$$5 \times 2 = 10 \text{ g } H_2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۹۹- پاسخ: گزینه ۳

(۱) درست؛ H_2 نافقطبی است.(۲) درست؛ $2H_2$ و CH_4

(۳) نادرست؛ C در واکنش I از ۲ به -۲ رسیده و ۴ واحد کاهش یافته است.

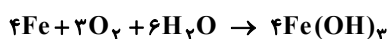
(۴) درست؛ از نصف یک مول متان ۱ مول CO و ۳ مول H_2 به دست می‌آید، اما برای متانول ۱ مول CO و ۲ مول H_2 لازم است، پس ۱مول H_2 اضافی هم داریم.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۱

(۲) درست؛ $Fe^{3+}(aq)$ و $OH^-(aq)$ هر دو محلول هستند.

(۳) درست

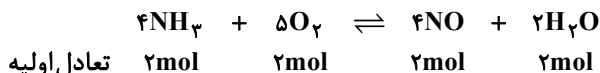


$$4 + 3 + 6 + 4 = 17$$

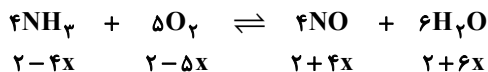
(۴) درست؛ هر چه $[H^+]$ بیشتر باشد، اکسندگی O_2 بیشتر می‌شود.

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



کاهش فشار باعث می شود تعادل در جهت تولید مول گاز بیشتر، یعنی در جهت رفت جابه جا شود، پس در تعادل جدید:



تغییر غلظت و مول مواد نباید باعث شود، مقدار O_2 و NH_3 به صفر برسد، چون واکنش کامل نیست:

$$2-4x > 0 \Rightarrow x < 0.5$$

$$2-5x > 0 \Rightarrow x < 0.4$$

$$\text{mol H}_2\text{O} \quad 2+6x < 2+6 \times 0.4 = 4.4$$

پس باید $x < 0.4$ باشد:

پس نمی تواند مقدار جدید برابر $4/4.5$ باشد. اما باید نسبت به ۲ مول اولیه بیشتر باشد، پس تنها مقدار مجاز در گزینه ها $3/2$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳

a یک مول دو اتمی ناجور هسته است، پس نمی تواند HCN یا SCO باشد.

b یک مولکول ۴ اتم جانبی یکسان و فاقد جفت ناپیوندی بر اتم مرکزی است. پس می تواند SiF_4 ، CH_4 یا SiH_4 باشد.

c یک مولکول خمیده است، یعنی بر اتم مرکزی آن جفت ناپیوندی وجود دارد، پس می تواند H_2S ، H_2O یا OF_2 باشد.

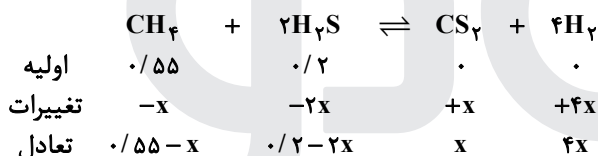
d یک مولکول با سه اتم جانبی است که بر اتم مرکزی حتماً جفت ناپیوندی وجود دارد. پس فقط ساختار NH_3 با آن تطبیق دارد و نمی تواند SO_3 (مسطح) باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱

$$8 \text{ g CH}_4 \times \frac{1 \text{ mol CH}_4}{16 \text{ g CH}_4} = 0.5 \text{ mol CH}_4$$

جدول تغییرات مولی:



$$0.55-x = 0.5 \Rightarrow x = 0.05 \text{ mol}$$

$$\text{مقدار تعادلی: } 0.5 \quad 0.1 \quad 0.05 \quad 0.2$$

$$K = \frac{[\text{CS}_2][\text{H}_2]^4}{[\text{CH}_4][\text{H}_2\text{S}]^2} = \frac{\frac{1}{V} \times \frac{0.05 \times (0.2)^4}{V^5}}{\frac{1}{V} \times \frac{0.5 \times (0.1)^2}{V^3}} = \frac{1}{(0.5)^2} \times \frac{0.05 \times 16 \times 10^{-4}}{0.5 \times 10^{-2}} = 6/4 \times 10^{-2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۳

قبل از بررسی جدول یک مطلب را دقت کنیم. در بین ترکیب های یونی دوتایی با بار $1+$ و $1-$ ، بیشترین ΔH فروپاشی به HF مربوط است که براساس نمودار کتاب درسی مقدار آن حدوداً برابر 1050 کیلوژول بر مول است. پس با توجه به اعداد 780 و 950 می توان دریافت که X^+ ، Y^+ و A^- است. در نتیجه Z^{2+} و D^{2-} است. حالا برای گزاره ها:

(الف) نادرست؛ اگر X^+ و A^- برابر 780 باشد، D^{2-} و X^+ باید از A^- و Y^+ بیشتر باشد، پس $M > 950$.

(ب) درست؛ X و Y هر دو یک بار مثبت هستند، پس باید شعاع X^+ از Y^+ بیشتر باشد، تا نسبت بار به شعاع و فروپاشی ΔH کمتری داشته باشد.

(پ) درست؛ A^- است.

(ت) نادرست؛ 2900 نشان می دهد که بار Z یا $2+$ یا بیشتر است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲

(۱) نادرست؛ اکسیژن از C نافلز قوی تری است (اکسندتر است)، پس عدد اکسایش کربن افزایش می یابد و دچار اکسایش می شود.

$$\text{C}_x\text{H}_y \quad x \times C + y \times 1 = 0 \Rightarrow C = -\frac{y}{x}$$

$$\text{C}_x\text{H}_y\text{O}_z \quad x \times C + y \times 1 + z \times (-2) = 0$$

$$c = \frac{2z-y}{x}$$

$$x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2z-y}{x} > -\frac{y}{x} \Rightarrow \text{اکسایش}$$

(۲) درست؛ در متن کتاب درسی اشاره شده است.

توضیح خارج از کتاب اما سودمند: متانول با PET واکنش می دهد و استر دو عاملی دی متیل ترفتالات تولید می کند.

(۳) نادرست؛ نه هر فراورده ای، بلکه فراورده سودمند.

(۴) نادرست؛ انرژی فعال سازی آن منفی نیست.